A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

PPI 2r., sem. letni
LISTY 5-9

Wrocław, 14 marca - 25 kwietnia 2006

LISTA 5

ZADANIE 1. Niech (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3),... będzie ciągiem przestrzeni metrycznych ograniczonych o średnicach nie przekraczających 1. Sprawdź, że w produkcie $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$ metryka produktowa

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_n c_n\, d_n(x_n, y_n), \quad (\text{gdzie } c_n > 0,\ \sum_n c_n \leq \infty)$$

nie zależy (z dokładnością do jednostajnego homeomorfizmu) od wyboru ciągu uzbieżniającego c_n.

ZADANIE 2. W produkcie $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$ jak w zadaniu poprzednim wprowadźmy metrykę ,,supremum": $d((x_n), (y_n)) = \sup_n \{d_n(x_n, y_n)\}$. Sprawdź, że ta metryka nie jest równoważna z metryką produktową.

ZADANIE 3. W $\{0, 1\}$ mamy metrykę naturalną $d(0, 1) = 1$, $d(0, 0) = d(1, 1) = 0$ (czyli dystkretną). Sprawdź, że w $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ metryka produktowa jest jednostajnie równoważna z wprowadzoną wcześniej (zwartą) metryką

$$d((x_n), (y_n)) = \frac{1}{\min\{n : x_n \neq y_n\}}.$$

ZADANIE 4. Skończony ciąg binarny $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ nazwiemy ,,blokiem". Sprawdź, że w $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,,cylinder nad blokiem B", czyli zbiór

$$\{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n\}$$

jest otwarty i domknięty w metryce produktowej.

ZADANIE 5. W przestrzeni $C_0(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ i mających granice 0 w plus i minus nieskończoności rozważmy normę supremum. Wykaż, że otrzymamy ośrodkową przestrzeń liniowo-metryczną.

ZADANIE 6. Sprawdź, że przestrzeń z poprzedniego zadania jest izometrycznie izomorficzna z podprzestrzenią $C([0, 1])$ składającą się z funkcji f takich, że $f(0) = f(1) = 0$.

ZADANIE 7. Sprawdź, że przestrzeń liniowo-metryczna c ciągów zbieżnych z normą supremum jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $C(\Omega)$ funkcji ciągłych na Ω, gdzie Ω jest przestrzenią zwartą składającą się z zera i ciągu $(\frac{1}{n})$.

ZADANIE 8. Jakie zachodzą inkluzje pomiędzy zbiorami ciągów tworzącymi przestrzenie c, c_0, l^1, l^2 i l^∞ (ciągi ograniczone)?

ZADANIE 9. Rozważmy przestrzenie (c, d_{sup}), (c_0, d_{sup}), (l^1, d_1), (l^1, d_{sup}), (l^2, d_2), (l^1, d_2), (l^2, d_{sup}). i (l^∞, d_{sup}). Które z nich są zupełne? Które z nich są ośrodkowe?

LISTY 6-9

ZADANIE 10. Udowodnij, że w przestrzeni liniowej $C(\mathbb{R})$ nie można wprowadzić normy takiej, że zbieżność punktowa funkcji implikuje zbieżność w normie, ani takiej, że zbieżność w normie implikuje zbieżność jednostajną.

ZADANIE 11. Wykaż, że zbiór ciągów sumowalnych z modułem i o sumie (bez modułów) zero jest gęsty w l^2, ale nie w l^1.

ZADANIE 12. Wykaż, że klasa będąca elementem przestrzeni $L^1(\mathbb{R})$ zawiera co najwyżej jedną funkcję ciągłą. To samo dla $L^2(\mathbb{R})$.

ZADANIE 13. Sprawdź zupełność i ośrodkowość przestrzeni ℓ^p i $L^p(\mu)$. Wskaż bazę w ℓ^p.

ROZWIĄZANIE dot. zupełności $L^p(\mu)$. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu, wystarczy wykazać, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. A więc załóżmy, że dany ciąg (f_n) ma zbieżny szereg norm, to znaczy, że ciąg sum

$$\sum_{n=1}^{k} \|f\|_p$$

jest zbieżny (po k) do jakiejś liczby M. Oczywiście zbieżność ta jest niemalejąca, więc M jest większa równa od wszystkich takich sum. Mamy wykazać zbieżność w normie ciągu funkcji

$$g_k = \sum_{n=1}^{k} f_n.$$

Rozważmy funkcje pomocnicze $h_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n|$. Z podaddytywności normy mamy, dla każdego k

$$\|h_k\|_p \leq \sum_{n=1}^{k} \big\| |f_n| \big\|_p = \sum_{n=1}^{k} \|f\|_p \leq M.$$

Oczywiście funkcje h_k tworzą niemający ciąg funkcji nieujemnych, więc mają one w każdym punkcie granicę h (na razie jest to tylko granica punktowa i być może przyjmująca wartości nieskończone). Funkcje h_k^p zbiegają niemalejąco (w każdym punkcie) do h^p. Można więc stosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, czyli

$$\int h^p \, d\mu = \lim_{k} \int h_k^p \, d\mu.$$

Na obie strony nakładamy potęgę $\frac{1}{p}$ i po prawej stronie, z ciągłości funkcji potęgowej, możemy z potęgą można wejść pod granicę. Wyjdzie:

$$\|h\|_p = \lim_k \|h_k\|_p \leq M.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że funkcja h należy do $L^p(\mu)$, w szczególności funkcja ta jest skończona na zborze X' miary pełnej i całka z h^p jest skończona. Funkcję h^p zastosujemy za chwilę jako majorantę w Twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

Wracamy do ciągu funkcji f_n i ich sum częściowych g_k. Przed wchwilą wykazaliśmy, że w każdym punkcie x zbioru X' szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny, a więc zbieżny (w $\mathbb{R}$). Zatem na X' funkcja graniczna $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest dobrze zdefiniowana. Trzeba wykazać, że sumy skończone g_k zbiegają do f w normie, tzn, że normy $\|f - g_k\|_p$ zbiegają po k do zera. Ale $f - g_k$ to ogon szeregu, czyli trzeba wykazać, że funkcje $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ zbiegają (po k) do zera w normie. Opuszczajaąc zewnętrzną potęgę (do $\frac{1}{p}$), mamy wykazać, że

$$\int \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n \right|^p d\mu \xrightarrow{k} 0$$

Pod całką mamy ciąg funkcji nieujemnych zbieżny prawie wszędzie (na X') do zera (w każdym punkcie są to ogony szeregu zbieżnego). Wystarczy więc wspólnie oszacować z góry wszystkie funkcje podcałkowe przez jedną funkcję nieujemną o całce skończonej, aby zbieżność całek do zera wynikała z Tw. Lebesgue'a. Mamy

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n \right|^p \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n| \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p = h^p.$$

Już wiemy, że h^p ma całkę skończoną, więc koniec dowodu.

ZADANIE 14. Jakie zachodzą inkluzje pomiędzy zbiorami klas tworzącymi przestrzenie $L^1(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$ i $L^\infty(\mathbb{R})$. To samo pytanie dla dziedziny $[0,1]$ w miejsce $\mathbb{R}$ (uwaga, będą różnice!).

ZADANIE 15. Czy ze zbieżności w L^1 wynika zbieżność prawie wszędzie? A na odwrót?

ZADANIE 16. Podaj przykład ciągu funkcji na $\mathbb{R}$ zbieżnego w L^2 ale nie w L^1 oraz przeciwny przykład na $[0,1]$. Czy są przykłady,w których zamienimy role $\mathbb{R}$ i $[0,1]$?

ZADANIE 17. Udowodnij, że normy równoważne są zawsze lipshitzowsko równoważne. Wykaż, że w $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$) wszystkie normy są równoważne.

ZADANIE 18. Czy prawdą jest, że jeśli założymy, że ciąg funkcji z $L^1 \cap L^2$ zbiega do granicy należącej do $L^1 \cap L^2$, to zbieżność w normie L^1 jest równoważna ze zbieżnością w L^2. Czy to jest prawdą na $\mathbb{R}$ i $[0,1]$?

ZADANIE 19. Udowodnij, że w przestrzeni c_0 nie ma przeliczalnej bazy Hamela.

ZADANIE 20. Podaj przykład przestrzeni o przeliczalnej bazie Hamela. Udowodnij, że w żadnej przestrzeni Banacha nie ma przeliczalnej bazy Hamela.

ROZWIĄZANIE dot. przestrzeni Banacha. Niech $B = \{e_1, e_2, \dots\}$ będzie bazą Hamela w przestrzeni Banacha V. Od razu możemy założyć, że $\|e_n\| = 1$ dla każdego n. Rozważmy podprzestrzenie $V_0 = \{\mathbf{0}\}$ i $V_n = Lin\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dla $n \geq 1$. Ponieważ to są przestrzenie skończenie-wymiarowe, to są one domnkięte. Przypomnijmy, że odległość punktu od zbioru domkniętego, do którego ten punkt nie należy, jest liczbą dodatnią. Zdefiniujemy teraz ciąg (x_n), który tworzy szereg bezwzględnie zbieżny ale nie zbieżny. Niech $x_1 = e_1$. Niech $\epsilon_0 = d(x_1, V_0)$ (odległość punktu od zbioru domkniętego; w pierwszym kroku to jest akurat tyle samo co $\|x_1\|$ a to jest 1). Niech $x_2 = \frac{\epsilon_0}{3} e_2$ Z niezależności zbioru $\{e_1, e_2\}$ wynika, że element $x_1 + x_2 = e_1 + \frac{\epsilon_0}{3} e_2$ nie należy do V_1. Niech $\epsilon_1 = d(x_1 + x_2, V_1)$. Oczywiście $\epsilon_1 \leq d(x_1 + x_2, x_1) = \|x_2\| = \frac{\epsilon_0}{3}$. I dalej indukcyjnie. Przypuśćmy, że dla $i = 1, 2, \dots, n$ zdefiniowaliśmy elementy x_i w taki sposób, że odległość

$$\epsilon_{n-1} = d(x_1 + x_2 + \dots + x_n, V_{n-1})$$

spełnia (założenie indukcyjne)

$$\epsilon_{n-1} \leq \frac{\epsilon_{n-2}}{3}.$$

Niech $x_{n+1} = \frac{\epsilon_{n-1}}{3} e_{n+1}$. Z niezależności zbioru $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ wynika, że element $x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}$ nie należy do V_n. Określmy $\epsilon_n = d(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}, V_n)$ i zauważmy, że

$$\epsilon_n \leq d(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}, x_1 + \dots + x_n) = \|x_{n+1}\| = \frac{\epsilon_{n-1}}{3},$$

czyli, że założenie indukcyjne jest spełnione dla $n+1$. W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg x_n (i liczby ϵ_n) o własności $\epsilon_n \leq \frac{\epsilon_{n-1}}{3}$ dla wszystklich n. Teraz zauważmy, że ciąg ϵ_n tworzy szereg zbieżny, gdyż rekurencyjnie mamy $\epsilon_n \leq \frac{1}{3^n}$. Ale co najistotniejsze, mamy również

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon_{n_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \epsilon_{n_0} \frac{1}{2}.$$

Zatem ciąg x_n tworzy szereg bezwzględnie zbieżny, gdyż $\|x_n\| = \frac{\epsilon_{n-2}}{3}$ (dla $n \geq 2$). Załóżmy, że szereg ten jest zbieżny do pewnego $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Z założenia o bazie Hamela, x musi należeć, do którejś podprzestrzeni V_{n_0}. Ale zauważmy, że odległość $x_1 + \dots + x_{n_0} + x_{n_0+1}$ od V_{n_0} wynosi ϵ_{n_0}, zatem $d(x, x_1 + \dots + x_{n_0} + x_{n_0+1})$ nie może być mniejsza. Ale ta odległość to norma ogona szeregu $\|\sum_{n=n_0+2}^{\infty} x_n\|$, która nie przekracza ogona szeregu norm $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{3}$, a to nie przekracza $\frac{\epsilon_{n_0}}{3} + \epsilon_{n_0} \frac{1}{6} = \frac{\epsilon_{n_0}}{2}$. Sprzeczność.

ZADANIE 21. Wskaż bazy topologiczne w c_0, c i ℓ^2.

ZADANIE 22. Podaj przykład na to, że zbiór niezależny liniowo gęsty nie musi być bazą topologiczną (np. gdy jakiś element przestrzeni daje się przybliżać kombinacjami liniowymi z tego zbioru, ale nie sumami częściowymi szeregu). Podaj inny przykład, gdzie nie ma jednoznaczności reprezentacji (na przykład dla zera).

ZADANIE 23. Wykonaj rachunek pokazujący, że do sprawdzenia jednoznaczności przedstawienia wektora v jako szeregu w bazie $\mathcal{B}$ wystarczy to zrobić dla $v = \mathbf{0}$.

ZADANIE 24. Wskaż bazę w przestrzeni funkcji ciągłych na $[0, 1]$ zerujących się w ustalonym punkcie p.

ZADANIE 26. W przestrzeni z iloczynem skalarnym wyprowadź warunek równoległoboku:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

ZADANIE 27. Przy założeniu warunku równoległoboku wyprowadź wzór na iloczyn skalarny wyrażony wyłącznie za pomocą normy. Sprawdź poprawność definicji.

****
W zadaniach 28-32 $\{e_1, e_2, \dots\}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni unitarnej V i $x \in V$.

ZADANIE 28. Sprawdź, że rzut ortogonalny x_W na podprzestrzeń $W = Lin\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jest jednoznaczny.

ZADANIE 29. Sprawdź, że

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x|e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

ZADANIE 30. Niech $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Sprawdź, że $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$.

ZADANIE 31. Niech $(c_i) \in l^2$. Wykaż, że wtedy elementy $x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ tworzą ciąg podstawowy.

ZADANIE 32. Wylicz, że jeśli istnieje granica x ciągu x_n z poprzedniego zadania, to

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

****

ZADANIE 33. Czy w którejś z przestrzeni $c, c_0, l^1, l^\infty, L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R}), L^1([0, 1]), L^\infty([0, 1])$ da się wprowadzić iloczyn skalarny zgodny z normą?

ZADANIE 34. W przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$ funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem modułu na kole jednostkowym

$$\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}.$$

iloczyn skalarny (zespolony) zadajemy wzorem

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\overline{g(z)}dz.$$

Udowodnij, że układ funkcji $\{\gamma_n(z) = z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ jest bazą ortonormalną zespolonej przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{T})$.

ZADANIE 35. Czy $L^2([0,1])$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta?

ZADANIE 36. Wykaż, że w przestrzeni Hilberta układ ortonormalny jest bazą wtedy i tylko wtedy gdy jedynym wektorem ortogonalnym do wszystkich wektorów bazy jest zero.

ZADANIE 38. Wykaż, że każda rzeczywista ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z l^2.

ZADANIE 39. Układ wielomianów $1, x, x^2, \dots$ jest liniowo niezależny w $L^2([0,1])$. Co otrzymamy po dokonaniu ortogonalizacji Gramma-Schmidta? Czy otrzymamy bazę?

CZĘŚĆ ROZWIĄZANIA: Częścią rozwiązania jest wykazanie, że funkcje ciągłe leżą gęsto w $L^2([0,1])$. Daną funkcję $f \in L^2([0,1])$ przybliżamy najpierw funkcją ograniczoną. Uzyskujemy to obcinając f na poziomach $-M$ i M: $f_M = \min\{-M, \max\{f, M\}\}$. Całki $\int |f - f_M|^2\, dx$ zbiegają (przy $M \to \infty$) do zera, gdyż funkcje podcałkowe są nieujemne i zbiegają punktowo do zera poniżej całkowalnej fukcji f^2. Następnie dowolną funkcję mierzalną ograniczoną (np. f_M) można przybliżać jednostajnie funkcjami prostymi g_n (to wiemy z teorii miary). Zbieżność jednostajna implikuje zbieżność w $L^2([0,1])$. Dalej, każda funkcja prosta g jest postaci $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i}$, gdzie $\{A_i\}$ jest rozbiciem na zbiory mierzalne. Z regularności miary Lebesgue'a, każdy ze zbiorów A_i można przybliżyć z dokładnością do $\frac{\epsilon}{kc_i}$ (w sensie miary) zawartym w nim zbiorem domkniętym F_i i zawierającym go zbiorem otwartym U_i. Z twierdzenia Urysohna istnieje funkcja ciągła f_i zerująca się poza zbiorem U_i i równa 1 na F_i. Wtedy $\int |f_i - \mathbf{1}_{A_i}|dx < \frac{\epsilon}{kc_i}$, a zatem, kładąc $f = \sum_{i=1}^k f_i$ otrzymujemy $\int |g - f|dx < \epsilon$. W ten sposób przybliżyliśmy dowolną funkcję prostą funkcją ciągłą w $L^1([0,1])$, a ponieważ funkcja przybliżana i wszystkie przybliżające funkcje są wspólnie ograniczone, przybliżanie jest w $L^2([0,1])$. Koniec.

ZADANIE 40. Niech $f_n = 2 \cdot 1_{[0,\frac{1}{2^n}]\cup[\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n}]\cup\dots\cup[\frac{2^n-1}{2^n},1]} - 1$. Sprawdź, że układ $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ jest ortonormalny w $L^2([0,1])$. Czy jest on bazą? (Układ ten nazywa się układem Rademachera.)

ZADANIE 41. Sprawdź, że układ $\{\sin(nx), \cos(nx) : n = 1, 2, \dots\}$ jest bazą w $L^2([-\pi, \pi])$.

CZĘŚĆ ROZWIĄZANIA: Gdzieś po drodze trzeba pokazać, że w ośrodkowej przestrzeni Hilberta układ wektorów $B = \{v_1, v_2, \dots\}$ ortonormalny i liniowo gęsty jest bazą. To jest łatwe. Wiemy, że rzut każdego wektora na przestrzeń domkniętą rozpiętą przez przeliczalny układ ortonormalny zapisuje się jako szereg Fouriera nad tym układem i jest to zapis jednoznaczny. Ale skoro $\overline{\mathrm{lin}}(B)$ jest z założenia całą przestrzenią, to rzut każdego wektora jest tymże wektorem. Czyli każdy wektor zapsiuje się jednoznacznie jako szereg Fouriera nad B. Koniec.

ZADANIE 42. Niech $\{x_1, x_2, \dots\}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta V rozpinającym podprzestrzeń właściwą W i niech $x \in V$. Wykaż, że rzut ortogonalny $x_W = \sum_n \langle x_n | x \rangle x_n$ jest najbliższym x-owi punktem podprzestrzeni W i jest to jedyny tak bliski punkt.

ZADANIE 43. Rozwiń funkcję $y = x$ na $[-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera w bazie

$$\{1, \sin nx, \cos nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

ZADANIE 44. Dlaczego można powiedzieć, że ucho ludzkie to między innymi przyrząd do rozwijania funkcji w szereg Fouriera?

Tomasz Downarowicz